602. D'Amore B. (2007). La matematica è dappertutto. In: Marazzani I. (ed.) (2007). *La matematica e la sua didattica*. Atti del I Convegno Nazionale, Giulianova (Te), 4-5-6 maggio 2007. Bologna: Pitagora. 25-31. ISBN: 88-371-1677-2.

La matematica è dappertutto

Bruno D'Amore

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia
Facoltà di Scienza della Formazione, Università di Bolzano, Italia
Alta Scuola Pedagogica, Locarno
Dottorato di Ricerca in Didatticva della Matematica, Bogotà

A volte la parola "matematica" evoca alla nostra mente figure d'insegnanti esigenti e grandi dispendi di energie psico-cognitive in età giovanile, patemi d'animo e notti insonni...
Ma ben pochi sanno che questa disciplina, lungi dall'essere rigida e chiusa in sé stessa, fornisce invece plausibili e significativi linguaggi atti ad interpretare tutti o quasi i fenomeni naturali.
E ben altro...

Cominciamo dalla natura, esseri viventi e no
Il matematico francese Gabriel Lamé elaborò poco più di un secolo fa una formula che aveva lo scopo di rappresentare in un colpo solo una grande famiglia di curve, al semplice modificare alcuni parametri; la cosa, da un punto di vista scientifico, costituisce al più una curiosità, ma non rappresenta un'invenzione matematica degna di passare ai posteri...
Tuttavia, pochi anni fa, il botanico belga Johan Gielis la ritoccò quel tanto che basta per rappresentare le forme della natura, sia considerando esseri viventi che non.
Tale formula ha sorprendenti proprietà: è in grado di rappresentare la forma di minerali e di esseri viventi, una volta precisati i parametri che vi appaiono…
Ora, però, ci si può far prendere la mano dai calcoli e ... divertirsi un po': immettendo parametri a caso, con una certa continuità, si ottengono esseri viventi o minerali effettivamente esistenti ed altri ipotetici. In un certo senso, stiamo creando forme di vita, plausibile o estinta…

Continuiamo con la natura, ma attraverso l'arte figurativa
Lo stesso fece Albrecht Dürer (1471-1528) nei suoi studi di fisiognomica. Ma procediamo per punti. Dopo il suo primo viaggio in Italia (iniziato nel 1494), Dürer abbandona il rigore del suo maestro Michael Wolgemut (1434-1519) e copia letteralmente i segni pittorici del Pollaiolo (Antonio Benci) (1432-1498) e soprattutto di Andrea Mantegna (1431-1506), scoprendo di aver bisogno di compiere studi di geometria per migliorare la propria arte. Dichiara: *Senza conoscenza l'arte è un miscuglio casuale di imitazione sconsiderata, fantasia irrazionale e pratica ciecamente accettata.* Compie questi studi geometrici a Bologna. Tornato a Norimberga, non è più lo stesso artista. Da un lato la competenza geometrica acquisita, dall'altro una solida preparazione tecnica lo portano a studiare Vitruvio Pollone (I sec. a. C.), il grande autore del *De architectura*, opera che è stata l'ispirazione per molti rinascimentali, onde poter giungere alla compostezza astratta di *Adamo ed Eva* ed alla celeberrima *Melanconia* che rappresenta il trionfo dei suoi interessi matematici.
Lo studio della geometria lo porta dapprima a trattare di prospettiva ma poi lo appassiona lo studio geometrico delle figure umane, come è testimoniato senza alcuna possibilità di falsa interpretazione in schizzi conservati ancora oggi. D'ora in poi, con ossessiva ostinazione, Dürer studia una sorta di "geometria del corpo umano". Questo tipo di attenzioni era tipico dell'epoca; anche Leon Battista Alberti (1404-1472) è celebre per un suo personale metodo per misurare le fattezze umane allo

scopo di portarle alla perfezione (*exempeda*). Dürer costruisce un “reticolo uniforme”, cioè un piano quadrettato, all’interno del quale le fattezze umane hanno una griglia di riferimento comoda.
Nessun altro pittore del Rinascimento si spinge esplicitamente a tanto: Dürer è convinto di aver trovato una classificazione dei tipi umani, attraverso una geometria dinamica! Scrive il trattato *Unterweisung der Messung*, citato con grande rispetto da Galileo Galilei (1564-1642) e Johannes Kepler (1571-1630)... Ma non dagli amici... La monaca Eufemia Pirckheimer, suora a Bergen, scrive al fratello, l’amico più intimo di Dürer, tanto che il libro gli è dedicato: «Mi è appena venuto tra le mani un libro di Dürer, dedicato al tuo nome, che tratta della pittura e delle misure... Ci siamo divertite con quel libro, ma la nostra pittrice dice che a lei non serve a nulla perché può benissimo dipingere senza di esso».
[In verità questa suora-pittrice doveva essere abbastanza boriosa, dacché dichiarò lo stesso anche a proposito di Michelangelo Buonarroti (1475-1564)...].

Un po’ di letteratura

Senza essere così… scientifico, lo straordinario scrittore Jonathan Swift (Dublino 1667 – ivi 1745), ci dà una bella lezione di coerenza; pastore anglicano, Swift raggiunse una fama immortale con i suoi *Viaggi di Gulliver* (1726), una satira ancora oggi vivace ed incredibilmente attuale, stupidamente considerata letteratura per l’infanzia. Quando Gulliver raggiunge il paese di Lilliput, accade che...: *I matematici di Sua Maestà, avendo scoperto che la statura di Gulliver eccedeva la loro nella proporzione di dodici a uno, e considerando che i loro corpi erano simili al suo, inferirono che doveva contenere 1728 corpi loro e aver bisogno, per conseguenza, di altrettanto cibo quanto bastasse a nutrire il predetto numero di lillipuziani.*
Per capire la finezza di queste citazioni numeriche di Swift, bisogna fare un lungo passo indietro.
Fin dai tempi di Eudosso di Cnido (408 a. C. – 345 a. C.), Archita di Taranto (430 a. C. – 360 a. C.) ed ancora più di Archimede di Siracusa (287 a. C. – 212 a. C.), era ben noto che se tra due enti lineari c’è una data relazione (per esempio n), allora quella stessa relazione n vale tra le radici cubiche dei volumi che traggono origine da questi enti lineari.
Ebbene, i numeri scelti da Gulliver non sono casuali, dato che 1728 è proprio 12^3.
Swift insiste! A proposito del vino, Gulliver ne riceve per dissetarsi una botte laddove un lillipuziano ne beve mezza pinta; la proporzione è esatta, dato che a quei tempi 1728 mezze pinte facevano 108 galloni, dunque proprio una botte.
Mi chiedo quanti lettori si rendano conto di queste accuratezze narrative!

Matematica, storia, guerra, fisica, leggende… E che altro?

Abbiamo già nominato Archimede di Siracusa (287 a. C. – 212 a. C.), matematico di corte, ben celebre, oltre che per le sue immortali creazioni matematiche, anche per certe sue supposte macchine da guerra. Una delle più celebrate è costituita dallo specchio ustorio, cioè uno specchio di fattezze tali che sia possibile concentrare i raggi del Sole su un oggetto lontano, di legno, fino a farlo bruciare. È ben noto che di tali specchi realizzati da Archimede si parli fin da tempi assai remoti, ma non se n’è mai trovata traccia.
La loro realizzazione è un’impresa matematica plausibile, ma richiede uno strumento geometrico astratto di un certo livello, le coniche, cioè curve algebriche del II ordine, effettivamente studiate nell’antichità greca; per esempio le studiarono in forma molto elementare Menecmo di Cizico (IV sec. a. C.), il grande Euclide di Alessandria (III sec. a. C.) e, con più spessore matematico, Apollonio di Perge o di Perga (262 a. C. – 180 a. C.).
Anche supposto che lo studio delle coniche ai tempi di Archimede fosse sufficiente per costruire teoricamente gli specchi, si richiedono capacità e possibilità tecniche di altissimo livello, non banali, tra le quali la possibilità di levigare specchi a forma conica di dimensioni immense.
Fu solo con la nascita della geometria analitica ad opera di François Viète (Fontenay-le-Comte 1540 – Parigi 1603), Pierre de Fermat (Beaumont-de-Lomagne 1601 – Castres 1665) e soprattutto René Descartes (La Haye 1596 – Stoccolma 1650) che lo studio delle coniche raggiunse la sua struttura

attuale, diventando oggetto di analisi da parte di moltissimi scienziati, tra i quali, un frate gesuato che sempre si disse allievo di Galilei, Bonaventura Cavalieri (Milano 1598 – Bologna 1647).
Costui, matematico di notevole spessore, scrisse tra l'altro proprio uno studio dedicato allo specchio di Archimede: *Lo specchio ustorio overo trattato delle settioni coniche, ed alcuni loro mirabili effetti intorno al lume, caldo, freddo, suono e moto*, che pubblicò nel 1632.
Ho già esaminato dettagliatamente altrove, in altro mio studio, i contenuti di questo trattato, narrandone anche le controversie editoriali e la complessa storia accademica che l'accompagna; qui mi limito a dire che lo studio del Cavalieri è ancora fortemente legato alla geometria sintetica, tuttavia stimolante, ricco ed in un certo senso moderno. Solo i capitoli finali, dal XXIX al XXXII, sono dedicati allo specchio ustorio di Archimede.
Prima di procedere, però, vorrei far notare che dobbiamo a Tito Livio (287-212 a. C.) la particolareggiata descrizione dell'assedio di Siracusa da parte dei Romani guidati dal console Marco Claudio Marcello (270-208 a. C.). Ebbene, lo storico parla di "potenti macchine da guerra", di "mani di ferro legate da una forte catena" che scagliavano massi enormi a grandi distanze… Si tratta di cronaca storica reale attendibile o di sentito dire? O di … arricchimento aneddotico teso a glorificare maggiormente il vincitore, com'era prassi abituale a quei tempi?
Forse non tutti sanno che esiste una interessante secolare querelle a proposito della verità dell'esistenza delle macchine da guerra archimedee ed in particolare dello specchio ustorio; chi difende la credibilità di tali oggetti fa di solito riferimento, oltre che a Tito Livio, ad altre testimonianze, in verità non tutte concordi nella lettera, ma sì nello spirito; esse si trovano in Polibio (202-118 a. C.), Plutarco (46-120) e Dione (155-235). Ora, però, basta controllare le date di nascita di questi studiosi, per capire che le loro sono testimonianze indirette, probabilmente prese proprio da Tito Livio che fu per secoli copiato dagli storici e, com'è ben noto, riassunto (i suoi testi sono lunghissimi e sempre se ne preferirono versioni riassunte).
Inoltre, noi concentriamo sempre la nostra attenzione su Siracusa e su Archimede, per il fascino che questo personaggio ancora oggi esercita su di noi, ma potenti macchine da guerra usate da assediati per difendersi a lungo appaiono in molte storie e mitologie [ne ho trovato una raccontata dallo storico Zonàta il Greco (morto nel 1130) a proposito dell'assedio di Costantinopoli, costruita dal matematico Proclo di Costantinopoli (412-485). La minor fama leggendaria di Proclo, rispetto ad Archimede, ci porta ad una esaltazione minore di questo avvenimento…].
Ma torniamo a Cavalieri; con la tipica capacità certosina che ha il matematico quando narra e annota, anch'egli fa un lungo elenco di scienziati che hanno cercato di realizzare uno specchio ustorio; annovera, tra gli altri, insospettabili personaggi famosi: Vitellone (Witelo, in realtà: Erazm Ciolek) (1220-1275), un tal Crontio, Gerolamo Cardano (1501-1576), Marin Ghetaldo (o Marino Ghetaldi) (1566-1626), Giovan Battista della Porta (1535-1615). Accomuna tutti questi scienziati la convinzione che lo specchio dovesse essere parabolico, di dimensioni enormi, che potesse bruciare legno solo a distanze minime e che realizzarlo per davvero fosse un'impresa titanica. In particolare, G.B. della Porta, nel Libro XVII, Cap. 17 del suo *Magìa Naturale*, calcola distanze e misure; per far bruciare legno secco a 30 cm siamo già ad uno specchio di diametro di 9 m, se si vuol bruciare qualche cosa "a gittata d'arco", le misure di tale specchio superano l'immaginazione… Tra l'altro, uno specchio a forma parabolica di diametro di 9 m appare praticamente come piano, immaginiamoci uno di diametro 100 m o superiore. Inoltre, nota il della Porta, va tutto bene se le navi si trovano, rispetto a chi usa lo specchio, nella stessa direzione del Sole, altrimenti la cosa non funziona più neppure teoricamente. A meno che, dice Cavalieri, non esistessero ai tempi dei Siracusani sostanze e materiali oggi sconosciuti… Ma lui stesso considera ridicola questa congettura.
Questa questione all'apparenza oziosa (ma che cosa non lo è, nelle ricerche matematiche?), appassionò personaggi incredibili; si pensi a Tommaso Linacre (1460-1524), maestro di Tommaso Moro, studioso di grande valore, sia in matematica (tradusse e chiosò il *De Sphaera* di Proclo) sia in fisica (studiò a lungo e commentò il *De temperaturis* di Galeno); ebbene il Linacre asserisce, dopo ampia e dotta disquisizione, che Archimede non usasse specchi ustori ma "sassi infuocati lanciati da

mani d’acciaio”, il che è assai più credibile (ridimensionando le distanze, ovviamente; si ispira ad un passo di Galeno che racconta come una palla incendiaria fatta di resina e sterco di piccione sia stata la causa di un incendio a Misa…).
Pur convinto della irrealizzabilità concreta dello specchio ustorio, Cavalieri si lancia nella sua costruzione puramente teorica, eliminando anche i problemi di direzione del Sole, attraverso strumenti che chiama “cannoncini”.
Tanto si convince, man mano che procedono gli studi matematici, che arriva ad affermare che se avesse tempo e se potesse recuperare certi fogli d’appunti persi da tempo, chissà, forse, sarebbe in grado di realizzare per davvero tale specchio.
Qualcuno osa ancora affermare che la matematica non s’infila dappertutto?
A favore degli studi di Cavalieri, e dunque convinto della realizzabilità dello specchio, appare il grande Giovanni Vacca (1872-1953), matematico, storico e sinologo, persona di grande cultura, assolutamente credibile;
contro, Johan Ludvig Heiberg (1854-1928), matematico e filologo, grande studioso di Euclide e di Archimede, altrettanto credibile.
Cerchiamo tra i non matematici.
Il fisico E. Hoppe si dice possibilista, a seguito di un esperimento dovuto addirittura a Georges Louis Buffon (1707-1788), il quale riuscì ad incendiare legno secco a 10 passi di distanza usando un insieme di specchi invece che uno solo; a semplificare le cose: si trattava di specchi piani; a complicarle: si trattava di ben 168 specchi.
Un altro possibilista è G. Raskin, in un articolo del 1939.
Lo storico della letteratura Francesco De Sanctis (1817-1883), autorevolissimo oltre ogni dubbio, parla della questione in termini di “famosa storiella”; egli addirittura dichiara che questa leggenda fu creata di sana pianta pochi decenni dopo la caduta di Siracusa, dunque dopo la morte di Archimede, inventata da tal Celio Antipantro…
Una storia senza fine.

Matematica e storia
Già che ci stiamo occupando di storia, torniamo ad un’altra grande nemica mortale di Roma, la mitica Cartagine, nell’attuale golfo di Tunisi, fiera oppositrice dello strapotere romano, abitata da grandi esploratori, commercianti, più volte distrutta dai Romani, dai Vandali, dagli Arabi…
Come, quando, da chi fu fondata Cartagine? Narra la leggenda (ci sono sempre leggende alla base di fondazioni mitiche di città storicamente decisive) che ciò accadde nell’814 a. C. (dunque ben prima di Roma: 753 a. C., altra famosa leggenda) da una colonia di Fenici di Tiro, con a capo la bella Didone. Narra la leggenda che Didone, figlia del re di Tiro, moglie di Sicheo, bella e intelligente, aveva accumulato una grande ricchezza che faceva gola al cognato Pigmalione; questi tramò, uccise Sicheo (e forse il re, padre di entrambi) e s’impossessò delle ricchezze; avrebbe voluto anche… impossessarsi di Didone, ma lei riuscì a fuggire con una nave carica di gioielli, insieme dal alcuni fidati amici. Giunse sulle sponde settentrionali dell’Africa e chiese ospitalità al re di Numidia, il famoso Iarba. Questi, commosso dal triste racconto della naufraga e sconvolto dalla sua bellezza, decise di regalarle un pezzo di terra sulla riva del Mediterraneo, per fondarvi un villaggio. La principessa chiese: «Iarba, non voglio approfittare della tua generosa ospitalità, solo ti chiedo tanta terra quanta ne può *cingere* una pelle di bue». Commosso da una richiesta tanto contenuta, Iarba acconsentì senza indugi…
Ma Didone era evidentemente versata nelle cose matematiche perché…
Che cosa vuol dire “*cingere*”?
Nella versione immaginata da Iarba, “*cingere*” significa prendere una pelle di bue, ricoprire la terra e considerare quella superficie come proprietà di Didone.
Didone, invece, aveva in mente tutt’altra interpretazione geometrica! Fece tagliare la pelle in strisce sottilissime, a mo’ di corda; e fece “*cingere*” un grande appezzamento di terra usando la corda per individuarne il contorno.

Nella prima interpretazione, la pelle interpretava un'*area*, nella seconda un *perimetro*.
Orbene, se ammettiamo che il povero Iarba, per non fare la figura del fesso, accettò di buon grado di concedere l'inatteso munifico regalo, come Didone doveva far cingere il terreno in modo tale da poter fondare, altro che un villaggio!, ma un grande, poderosa città?
Detto in termini matematici: a parità di perimetro, qual è la superficie maggiore?
Detto in termini ancora più matematici, sotto forma di problema: *tra tutte le figure isoperimetriche, trovare quella di superficie maggiore.*
Calcoli geometrici abbastanza elementari mostrano che, a parità di numero *N*, tra un poligono di *N* lati regolare o no, conviene sempre prendere il poligono regolare.
Calcoli un poco più sofisticati mostrano che, tra più poligoni regolari, conviene prendere quello che ha il numero maggiore di lati.
Infine, con un passaggio che sfida l'intuizione, ma che può essere dimostrato con qualche conto, si scopre che, inserendo anche il cerchio tra le figure possibili (sebbene NON sia un poligono), conviene sempre prendere questa come figura di massima superficie.
Così, per l'appunto, fece Didone. Anzi, siccome la stupenda… matematica principessa fenicia era davvero intelligente, prese in realtà un semicerchio che aveva come diametro la riva. Così ricavò anche un potente porto che, sappiamo, diede lustro alla storia del Mediterraneo e gatte da pelare a Roma.

Bibliografia
D'Amore B. (2007). *Matematica dappertutto*. Bologna: Pitagora.